第41講・三平方の定理と空間図形

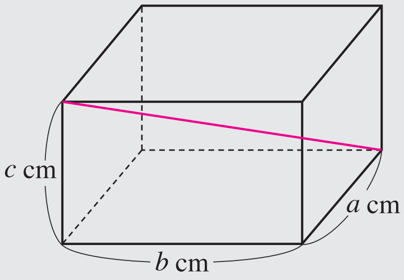
例題 1　直方体の対角線の長さ

ポイント

● 縦，横，高さがそれぞれ a cm，b cm，c cm の直方体の対角線の長さは

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ cm

である。



計算のしくみ

　右の図のように底面の対角線をひき，その長さを x cm とすると

$x^2 = a^2 + b^2$

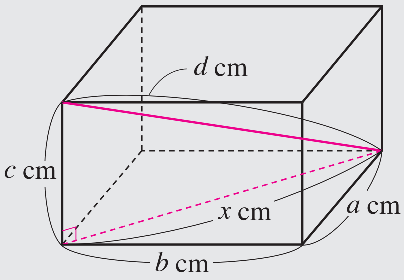
よって，直方体の対角線の長さを d cm とすると

$d^2 = x^2 + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2$

$d > 0$ なので

$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

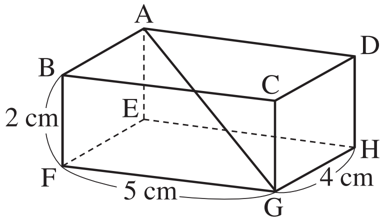


問題

　次の問いに答えなさい。

(1)　右の図の直方体の対角線 AG の長さを求めなさい。

(2)　1 辺の長さが 3 cm の立方体の対角線の長さを求めなさい。



解答

(1) 直方体の縦，横，高さはそれぞれ 4 cm，5 cm，2 cm だから，求める対角線 AG の長さは

$\sqrt{4^2+5^2+2^2}=\sqrt{45}$

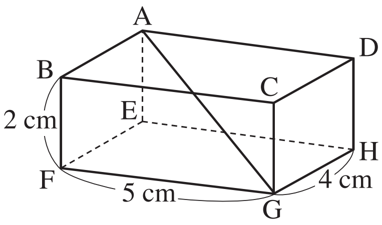
$=\mathbf{3\sqrt{5}}$ **(cm)** …**(答)**

(2) 立方体のすべての辺の長さは 3 cm だから，求める対角線の長さは

$\sqrt{3^2+3^2+3^2}=\sqrt{27}$

$=\mathbf{3\sqrt{3}}$ **(cm)** …**(答)**

MEMO

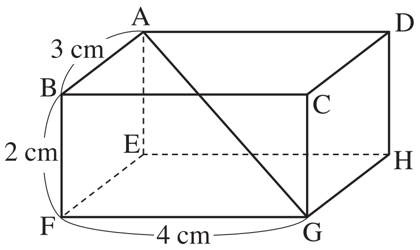


確認テスト 1

次の問いに答えなさい。

(1) 右の図の直方体の対角線 AG の長さを求めなさい。

(2) 1 辺の長さが 2 cm の立方体の対角線の長さを求めなさい。



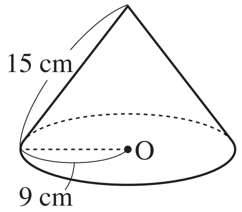
例題 2 円錐の体積

問題

右の図のように，底面の半径が 9 cm，母線が 15 cm の円錐がある。このとき，次の問いに答えなさい。

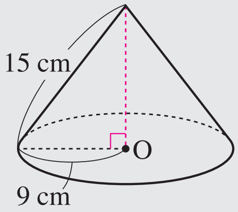
(1) この円錐の高さを求めなさい。

(2) この円錐の体積を求めなさい。



ポイント

● 母線と底面の半径が与えられた円錐の高さ
→ 円錐の半径，高さ，母線によって囲まれた直角三角形において，三平方の定理を利用して求める



解答

(1)　円錐の半径，高さ，母線によって囲まれた三角形は直角三角形だから，高さを h cm とすると

$$9^2 + h^2 = 15^2$$
$$h^2 = 225 - 81$$
$$h^2 = 144$$

$h > 0$ なので

$$h = 12$$

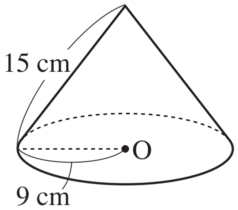
よって

12 cm　…(答)

(2)　(1)より，円錐の高さは 12 cm なので，求める体積は

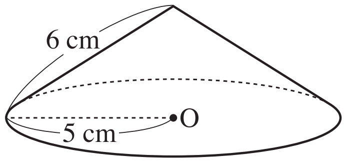
$$\frac{1}{3} \times \pi \times 9^2 \times 12 = \mathbf{324\pi}\ (\mathbf{cm^3})$$ …(答)

MEMO



確認テスト 2

右の図のように，底面の半径が 5 cm，母線が 6 cm の円錐がある。このとき，次の問いに答えなさい。
(1)　この円錐の高さを求めなさい。
(2)　この円錐の体積を求めなさい。



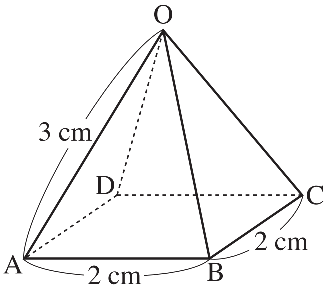
例題 3 角錐の体積

問題

右の図のような正四角錐 O–ABCD について，次の問いに答えなさい。

(1) この正四角錐の高さを求めなさい。

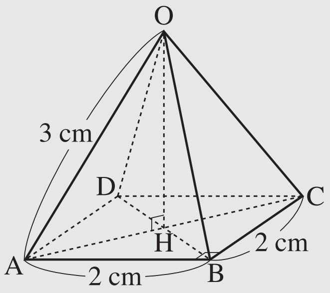
(2) この正四角錐の体積を求めなさい。



ポイント

● 各辺の長さが与えられた正四角錐の高さ

→ 正四角錐の高さを OH とすると，点 H は底面の正方形の対角線の交点である。∠OHA = 90° だから，直角三角形 OHA に注目して，三平方の定理を利用して求める



解答

(1)　点 A と C を結ぶ。△ABC は ∠ABC = 90° の直角二等辺三角形だから

$AC : AB = \sqrt{2} : 1$

$AC : 2 = \sqrt{2} : 1$

$AC = 2\sqrt{2}$ (cm)

よって

$AH = \frac{1}{2}AC$

$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}$ (cm)

したがって，直角三角形 OAH に着目すると

$OH^2 + (\sqrt{2})^2 = 3^2$

$OH^2 = 9 - 2$

$OH^2 = 7$

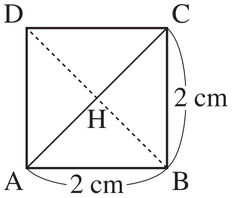
OH > 0 だから

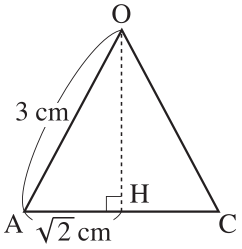
$OH = \sqrt{7}$ **cm**　…(答)

(2)　(1)より，正四角錐の高さは $\sqrt{7}$ cm なので，求める体積は

$\frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \sqrt{7} = \frac{4\sqrt{7}}{3}$ **(cm³)**　…(答)

MEMO



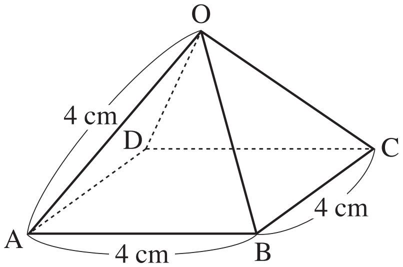


確認テスト 3

右の図のような正四角錐 O–ABCD について，次の問いに答えなさい。

(1)　この正四角錐の高さを求めなさい。

(2)　この正四角錐の体積を求めなさい。



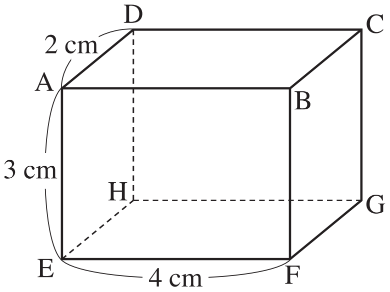
例題 4　直方体とひもの長さ

問題

　右の図の直方体において，直方体の表面を通って，頂点 A から頂点 G まで，ひもをゆるまないようにかける。このとき，次のそれぞれの場合について，ひもの長さを求めなさい。

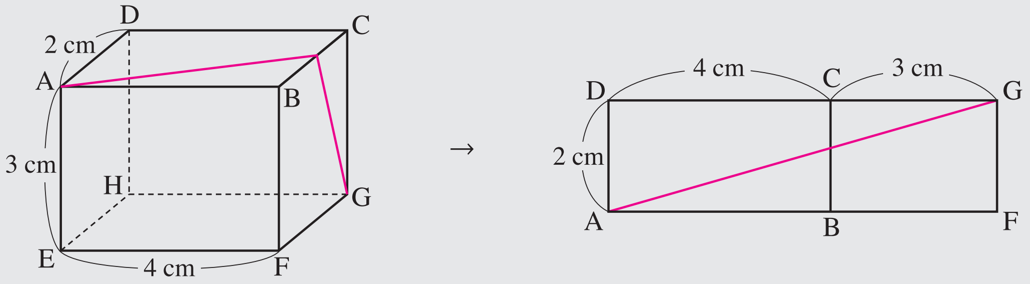
(1)　ひもが辺 BC を通るようにかけるとき

(2)　ひもが辺 EF を通るようにかけるとき



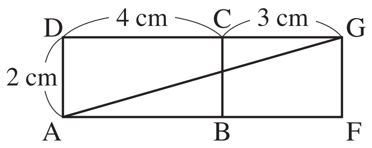
ポイント

● ひもをゆるまないようにかける
　→ ひもの長さは最小になるので，展開図をかいてその長さを求める。



解答

(1)



　求めるひもの長さは，上の展開図の長方形 AFGD の対角線 AG の長さだから

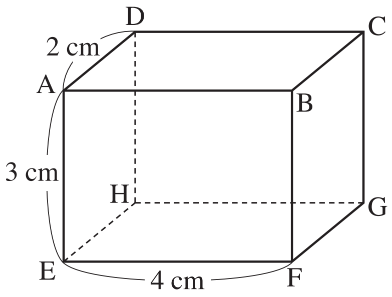
$$AG^2 = 2^2 + (4 + 3)^2$$
$$= 4 + 49$$
$$= 53$$

AG > 0 なので

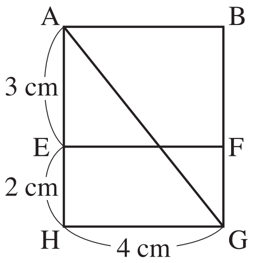
$AG = \sqrt{53}$ **cm**　・・・(答)

MEMO

(1)



⑵



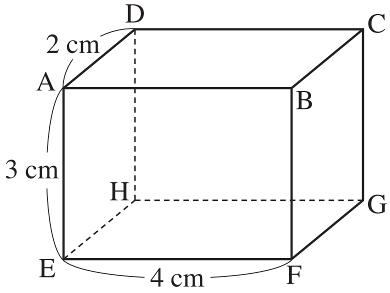
求めるひもの長さは，上の展開図の長方形 AHGB の対角線 AG の長さだから

$$
\begin{aligned}
AG^2 &= (3+2)^2 + 4^2 \\
&= 25 + 16 \\
&= 41
\end{aligned}
$$

AG > 0 なので

$AG = \sqrt{41}$ **cm**　…(答)

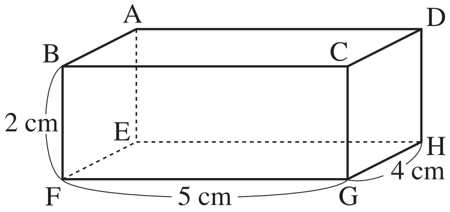
⑵



確認テスト 4

右の図の直方体において，直方体の表面を通って，頂点 A から頂点 G まで，ひもをゆるまないようにかける。このとき，次のそれぞれの場合について，ひもの長さを求めなさい。

⑴　ひもが辺 BC を通るようにかけるとき
⑵　ひもが辺 BF を通るようにかけるとき
⑶　ひもが辺 EF を通るようにかけるとき



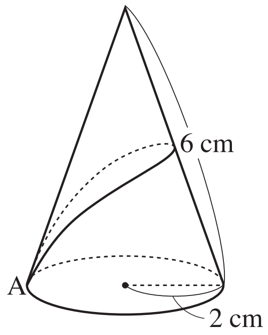
例題 5　円錐とひもの長さ

問題

右の図のように，底面の半径 2 cm，母線の長さ 6 cm の円錐があり，底面の周上にある点 A から，円錐の側面を 1 周してもとの点 A まで，ひもをゆるまないようにかける。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　円錐の展開図で，側面のおうぎ形の中心角を求めなさい。

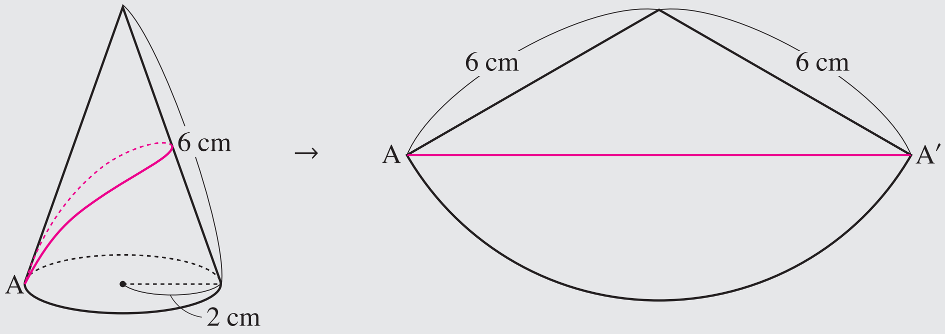
(2)　ひもの長さがもっとも短くなるとき，その長さを求めなさい。



ポイント

● ひもをゆるまないようにかける

→ ひもの長さは最小になるので，展開図をかいてその長さを求める。



解答

(1)　展開図のおうぎ形の弧の長さは，底面の円の円周と等しいから，おうぎ形の中心角を $x°$ とすると

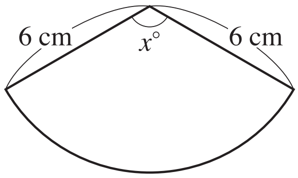
$$2\pi \times 6 \times \frac{x}{360} = 2\pi \times 2$$

$$x = 120$$

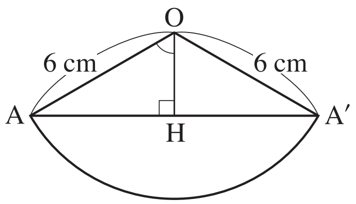
よって

120°　…(答)

MEMO



(2)



求めるひもの長さは，上の図の線分 AA′ の長さである。おうぎ形の中心を O とし，点 O から AA′ にひいた垂線と AA′ との交点を H とすると，側面の中心角が 120° なので

$\angle AOH = 60°$

よって，直角三角形 OAH に着目すると

$AH : OA = \sqrt{3} : 2$

$AH : 6 = \sqrt{3} : 2$

$2AH = 6\sqrt{3}$

$AH = 3\sqrt{3}$ (cm)

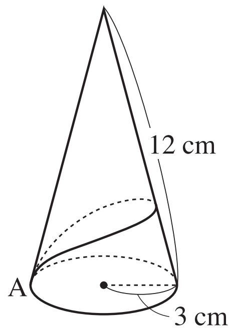
したがって，ひもの長さは

$2AH = 2 \times 3\sqrt{3}$

$= \mathbf{6\sqrt{3}}$ **(cm)**　…(答)

確認テスト 5

右の図のように，底面の半径 3 cm，母線の長さ 12 cm の円錐があり，底面の周上にある点 A から，円錐の側面を 1 周してもとの点 A まで，ひもをゆるまないようにかける。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 円錐の展開図で，側面のおうぎ形の中心角を求めなさい。

(2) ひもの長さがもっとも短くなるとき，その長さを求めなさい。